

Algoritmikus gondolkodásra nevelés

SZILÁK ALADÁRNÉ

Abstracto. (Bazoj de kalkultekniko en la matematikainstruadon integrale) La skribleciono modelon montras bazoj de kalkultekniko por aplikado en la matematikainstruadon integrale. En la bazgrado instruado aplikado de la algoritmadaj akcelas elformon, evoluigon de la algoritmada pensado. Ĉi tio grava edukada tasko dum la matematikaj studhoroj ankaŭ.

Néhány bevezető gondolat

A számítógéptudomány az elmúlt évtizedekben óriási fejlődésen ment keresztül. Az igények növekedése szükségszerűvé tette a számítástechnika alap- és középszintű oktatását, mely szakkörön, fakultáción, tanórán (számítástechnika, informatika, matematika, technika) az iskolák többségében bevezetett. A középiskolákban kísérletileg megalapozott tankönyvek, didaktikailag jól kidolgozott megoldásrendszerek (kézikönyvek, példatárak) segítik a tanárok, tanulók munkáját.

A kötelező iskolázás szintjén (6—16 éves kor) a matematikatanításba integrálva lehetne a számítástechnikai ismereteket megalapozni. A matematikatanítás alapvető feladata a logikus, a rugalmas, a fegyelmezett gondolkodásra, problémamegoldásra nevelés. A számítástechnika elemeinek az oktatása és alkalmazása az **algoritmikus gondolkodásmód kialakításával és fejlesztésével segítené** a fenti feladatok teljesítését. Hasonlóan a matematikai logikához, a halmazelmélet alapjaihoz, a kombinatorikához — melyeket nem tanítunk önálló témakörként — eszköz, fejlesztő, előkészítő jellegűek lennének a számítástechnikai alapismeretek.

Sokan kételkednek a matematika és a számítástechnika pozitív kölcsönhatásában ezen a szinten. Az biztos, hogy csak határozott megközelítéssel, az ötletek és a módszerek kidolgozása, finomítása után (kísérletezéssel) várható egyértelmű eredmény. A számítástechnika olyan gyorsan fejlődik, hogy nem nagyon érdemes „holnapra már elavuló” ismeretekre helyezni a hangsúlyt. Elsősorban a „kiszolgált tantárgy” (matematika) igényeit figyelembe véve általános számítástechnikai kultúra adása legyen a cél: Az alapszintű osztályokban az algoritmusok tanítása, alkalmazása, a számítógép oktatási segédeszközként történő használata a feladat. Az emelt szintű matematikatanításban a fentiekén kívül megfogalmazódhatnak olyan követelmények is,

amelyek valamely programnyelv elemeinek az elsajátításához kapcsolódnak.

A továbbiakban egy modellt szeretnénk mutatni a számítástechnikai ismeretek módszertani feldolgozásához a matematika tanításában.

Algoritmusok alkalmazása az alapszintű matematika órákon

1. Alapismeretek

— *Algoritmus*: (a szó tervszerűséget jelent; a középkorban élt üzbég matematikus, al-Kvarizmi nevéből származik.) Az algoritmikus eljárás nem a számítógép tudománnyal született (Euklidész, ókori görög matematikus nevéhez fűződik pl. az euklidészi algoritmus).

Definíció: Az algoritmus olyan egymást követő elemi lépések véges sorozata, amely valamely **probléma** egyértelmű és teljes megoldására alkalmas. A keresett eredményt létrehozó elemi lépéseket *utasításoknak* nevezzük.

Egy algoritmustól a következő **tulajdonságokat** várjuk el:

1. **Végesség:** az algoritmusnak véges számú lépés után meg kell tudni határozni a kiindulási feladat megoldását, vagy meg kell mutatni a probléma megoldhatóságát.

2. **Meghatározottság:** az algoritmus — azonos körülmények között végrehajtva — mindig azonos eredményre vezessen (egyértelműség).

3. **Általános érvényű:** az algoritmus nemcsak egy konkrét probléma megoldását szolgálja, hanem a problémák egy egész halmazát oldja meg.

4. **Bemenet:** a kiindulási adatokat jelenti, melyeket „beépíthetünk” az algoritmusba, vagy a problémamegoldó által „kívülről megadhatunk”.

5. **Kimenet:** a keresett megoldást, eredményt szolgáltatja.

6. **Hatékonyság:** az algoritmus a keresett eredmény(ek)hez a megadott feltételrendszer mellett fölösleges lépések nélkül jut el (a lehető legrovidebb idő- és helyigénnyel).

— *Probléma*:


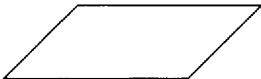
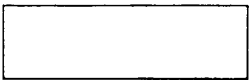
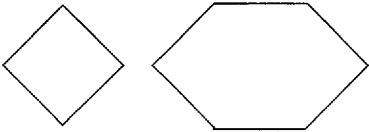

Definíció: Pólya György: „A probléma olyan szituáció, kérdés, feladat, amelyre a választ nem tudjuk azonnal emlékezet, észlelés, tapasztalás útján megadni, hanem csak közvetett úton: gondolkodási és logikai műveletvégzésen keresztül.”

Algoritmisleíró módszerek

a) Folyamatábra (blokkdiagram):

A feladat (probléma) megoldási lépéseinek sorrendjét — utasítástípusonként különböző geometriai alakzatok (szimbólumok) felhasználásával — szemléltető ábra, melyben a „folyamat irányát” nyilak mutatják.

Egyszerű folyamatábra szimbólumok, jelentésük

	az algoritmus (folyamat) elejét és végét jelzi
	beolvasó, kiíró utasítás (adatokat, eredményeket szolgáltat)
	feltétel nélkül végrehajtandó utasítás
	elágazás: a feladatvégrehajtás a rombuszba (hatszögbe) írt feltételtől függően egyik vagy másik irányba folytatódik (i-igen kimenetel, n-nem kimenetel)
	„felhő”: amit ide írunk további elemi lépésekre tagolható

1. ábra

b) Mondatszerű leírás:

Az algoritmus lépéseit mondatokkal vagy „mondatszerű szerkezetek” egymásutánjával írjuk le.

A mondatszerű leírással „Verbális” vagy „félíg formalizált ” algoritmusokat készíthetünk.

— Számítógép:

Olyan számítástechnikai eszköz, amely a gép nyelvére lefordított algoritmust végrehajtja.

A számítógép különböző alkalmazásaira gondolva azt is mondhatjuk, hogy a számítógép olyan (elektronikus) információtároló- és feldolgozó berendezés, amely a feladatok algoritmusának és a szükséges adatoknak az ismeretében előállítja a probléma megoldását.

Mikor kerüljön sor a fenti fogalmak, ismeretek tanítására?

Tanév elején (5. osztálytól) legalább két órát célszerű biztosítanunk konkrét feladatokhoz kapcsolva a folyamatábra, algoritmus fogalmak tisztázására, egyszerűbbek megkonstruálására. A tanulók viszonylag nehézség nélkül „játszanak el”, mondanak el olyan egyszerű cselekvéssort (folyamatot), amelyek életközlelől származnak (pl.: reggeli felkeléstől az iskolába indulásig tartó tevékenységek, nyilvános telefonfülkéből telefonálás, főzés, bevásárlás, átkelés a zebrán, piszkos tényérok mosogatása, almák méret szerinti osztályozása stb.). E példákön keresztül rendezhetjük is az algoritmusokat aszerint, hogy tartalmaznak feltételt (elágazó algoritmus), ismétlést (ciklus), vagy nem tartalmaznak feltételt (lineáris algoritmus). Természetesen az utóbbival kezdjük az ismerkedést. Itt mutassunk rá az algoritmus jellemző tulajdonságaira (végesség, egyértelműség, általános érvényű) is.

Ezek után kerüljön csak sor az egyszerű matematikai algoritmusok készítésére, leírására (folyamatábrával, mondatszerűen), algoritmussal megadott tevékenységsor elvégzésére (pl.: írásbeli műveletvégzés, geometriai számítások, egy szerkesztési feladat megoldása stb.).

E téma elemi szintű tanításához jó példákat találunk Varga Tamás: Játsszunk matematikát! 1. című könyvében, továbbá Lukács Ottó munkájában, amely az Utazások Matematikaországban sorozatban Gyerekmatek címmel jelent meg.

2. A tanult ismeretek rögzítéséről, alkalmazásáról

Sajnos a tapasztalat az, hogy a tanulók többsége nem jut el 13–14 éves korra sem oda, hogy egy ismeretlen, nem túl bonyolult matematikai probléma algoritmusát (folyamatábráját) önállóan el tudná készíteni. Ezt sem a ráfordítható idő, sem a tanulók életkora nem teszi lehetővé. Éppen ezért, ne „raboljuk” el a matematikától az időt azzal, hogy algoritmusok, folyamatábrák készítésével (még segítséggel sem) foglalkozunk!

Helyette:

— Kész folyamatábrát (algoritmust) „elemeztessünk”! (Kövesd a folyamatábra utasításait! Mit csináltat (old meg) a folyamatábra?)

— Hiányos folyamatábrát (algoritmust) „egészítettessünk” ki!

— Hibás folyamatábrában (algitmusban) „kerestessük meg a hibát”, majd „javíttassuk”!

— Konkrét folyamatábra-utasítások applikációs modelljeiből „készítettessük el” a folyamatábrát!

Időt takaríthatunk meg azzal is, ha az algoritmusokat, folyamatábrákat (folyamatábra részleteket) tanóra előtt felírjuk a táblára, írásvetítővel vetítjük, applikáljuk, számítógéppel megjelenítettjük stb.

3. Eszköz, fejlesztő, előkészítő jellegű alkalmazás, koncentrációs lehetőségek a matematika tantárgyon belül

Hol és mikor alkalmazzuk a matematikatanításban az algoritmusokat (folyamatábrákat), számítógépet, zsebszámológépet?

Az oktatási folyamat bármely mozzanatában, és akkor, amikor segítik, gyorsítják, szemléletesebbé, érdekesebbé teszik az új anyag feldolgozását, a rögzítést, gyakorlást, ismétlést, rendszerezést, számonkérést, **fejlesztik a tanulók algoritmikus gondolkodását.**

Mivel egy algoritmussal azonos típusú feladatokat tudunk megoldani, így bármely olyan anyagrészhez „hozzákapcsolható”, ahol azonos tevékenységnek a **készségfejlesztését** végezzük.

Ilyen algoritmusok lehetnek például:

- Írásbeli műveletvégzések a természetes számok halmazában.
 - Két pozitív tört összehasonlítása.
 - Törtek összeadása, kivonása, egyszerűsítése, bővítése.
 - Alapszerkesztések (szakaszfelezés, szögfelezés, „tükörkép” szerkesztése stb.).
 - Egy pozitív természetes szám összes osztójának a megkeresése.
 - Egy összetett szám prímtényezőkre bontása.
 - Két vagy több természetes szám legnagyobb közös osztójának, legkisebb közös többszörösének a meghatározása.
 - Egy szöveges feladat megoldásának lépései.
 - Egy geometriai szerkesztési feladat megoldásának lépései.
- stb.

Vannak olyan vélemények, hogy az algoritmusok alkalmazása káros, mert „leszűkíti” a tanulók gondolkodását, „uniformizálja” azt. „Alkotó munkára, kreativitásra kell nevelni — mondják —, mi pedig algoritmusokat oktunk.” A matematikatanításban fontos helyet foglal el azoknak a készségeknek a kialakítása, amelyeknek lehetőség szerint minél automatizáltabban kell lefolyniuk (Ilyenek például a szóbeli, írásbeli műveletvégzések; alapvető geometriai szerkesztések stb.). Ezek a készségek nemcsak önmagukban fontosak, hanem elengedhetetlen tényezői mindenfajta alkotó folyamatnak. Ha az algoritmusokat az oktatás megfelelő fázisaiban alkalmazzuk a tanulóink gondolkodását nem uniformizálják! Helyette kialakulhat egy olyan algoritmikus gondolkodásmód, amely a matematikai gondolkodást **pontosabbá, logikusabbá, teljesebbé, igényesebbé** teszi.

A fenti feladatok kapcsán tisztázhatjuk azt is, hogy milyen mélységig kell egy algoritmust elemi lépésekre bontani!

Pl.: egy szerkesztési feladat megoldásakor egy alapszerkesztés elvégzése „elemi lépése” az algoritmusnak.

A számítógépet a matematikaórákon elsősorban a tanári bemutatás eszközeként érdemes alkalmazni, ugyanis sok iskolában nincsenek meg a feltételei annak, hogy a tanulók mindegyike gépközelbe kerüljön. A számítógép tanítási órán való alkalmazásakor két alapvető célt kell figyelembe vennünk: Az egyik a tanulásméleti cél, vagyis mennyire használható a számítógép az oktatási folyamat mozzanataiban. A másik a tananyagtaxonómiai cél, azaz milyen kritériumrendszer alapján választható ki a tantervi anyagból a számítógép alkalmazásával feldolgozandó anyagrészt.

A számítástechnikai szakirodalom számos olyan programot közöl, amelyek jól használhatók a tanításban. A matematikatanárok is el tudnak készíteni olyan programokat, amelyek konkrét céljaik megvalósítását szolgálják. A számítógépet használhatjuk például:

— Új anyag feldolgozásakor (síkbeli egybevágósági transzformációk értelmezésének szemléltetése, hozzárendelések szimulálása stb.).

— Gyakorlaskor (geometriai számítások elvégzése, prímszámok keresése stb.).

— Valószínűségi kísérletek, játék szimulálására (kockadobás, pénzfeldobás, lottóhúzás stb.).

— Statisztikai számításokra (átlag, szórás, korrelációs együttható), mérési adatok grafikus megjelenítésére, ábrázolására.

— Ismeretek számonkérésére (feladatlap, teszt, totó stb.).

A zsebszámológép használatát 13–14 éves korig akkor érdemes megengedni, ha a tanulók biztosak a műveletvégzésben racionális számok halmazában, ha gyorsítani akarjuk a számolást (nem a műveletvégzés gyakoroltatása a célunk), ha a tanulók jól ismerik a zsebszámológép működését, tulajdonságait.

A 14–16 éves korú tanulóknak már követelmény egy választott zsebszámológép működésének ismerete és használata.

4. Példák a 2. és 3. pontokban leírtak konkretizálására

1. példa

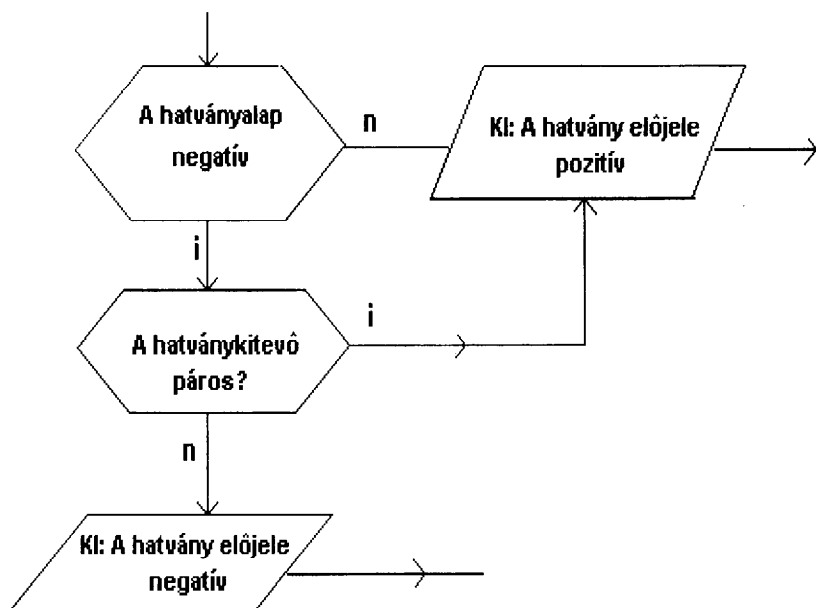
— A hatványozás tanításakor a következő folyamatábrarészlet az *elsőleges rögzítés, az általánosítás eszköze* lehet.

— *Gyakorlaskor* a megadott feltételekkel rendelkező hatványok előjel szerinti rendezését segítheti (a gyengébb tanulóknál, ha tudnak folyamatábra-utasításokat követni, értelmezni, jól bevált segítség).

— *Ismétléskor* a folyamatábrarészletet hibásan is megadhatjuk, melyet a tanulókkal javíttatunk, vagy applikációs modellekkel kirakjuk a folyamatot.

— A folyamatábrarészlet „finomítható” (kiegészíthető) a feladatban megfogalmazott feltételekkel.

Feladat: Mi lesz a hatvány előjele? A hatványalap nem nulla egész szám, a kitevő nem nulla természetes szám.



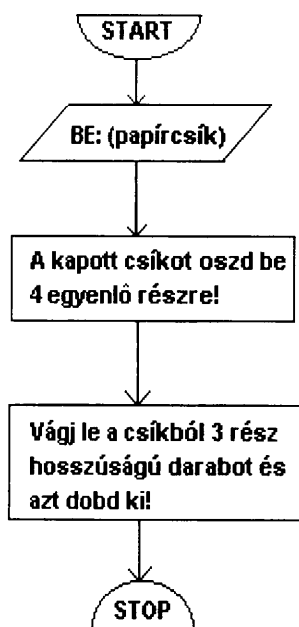
2. ábra

2. példa

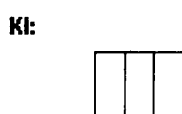
— A tört kétféle értelmezését többféle modell, eszköz alkalmazásával taníthatjuk. Az alábbi értelmezés „számítástechnikai modell” segítségével történik.

Feladat: a) Egy képzeletbeli automatába papírcsíkokat lehet bedobni. A gépbe ezt az utasítássort (programot) tápláljuk be. Dolgozz te is a „program” szerint (3. ábra)!

b) Egy másik automata ismét papírcsíkokkal dolgozik. „Programja” (4. ábra).

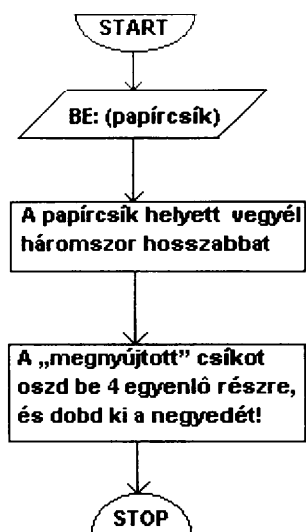


Megoldás: tanulói tevékenység

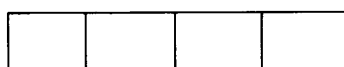


(eredmény)

3. ábra



Megoldás:



(eredmény)

4. ábra

c) Az automaták által kidobott papírcsíkok hosszát hasonlítsd össze! Mit tapasztalsz?

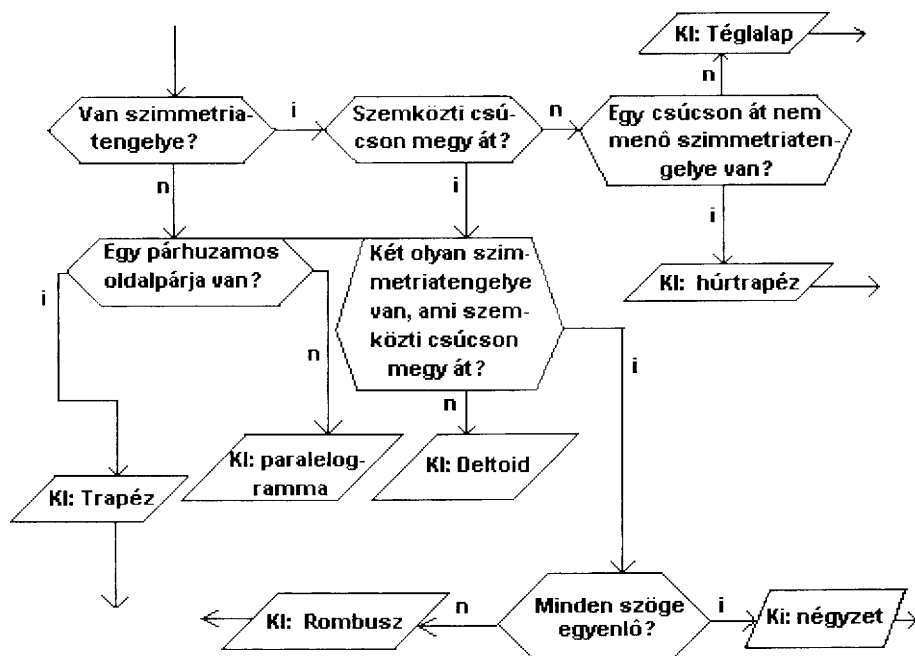
3. példa

— A trapézok, deltoidok tengelyes szimmetria szerinti rendszerezését végeztethetjük az alábbi folyamatábrarészlettel. Minden „ágát” követve a tanulók rajzolják a kimenetet (eredményt) jelző blokkba a feltételeknek megfelelő egy-egy négyszöget.

— Kis kiegészítéssel „barkochba játékra” is alkalmas az algoritmus.

— Nehezebb a feladat, ha egy-egy vizsgálatot (feltételt) más (de helyes) vizsgálattal kell helyettesíteni.

Feladat: Rendszerezzük a trapézokat, deltoidokat a tengelyes szimmetria szerint!



5. ábra

4. példa

— Az ismeretek alkalmazását, gyakorlását segíti a következő mondat-szerű leírással készült algoritmus, mely egy szöveges feladat megoldását adja meg:

Feladat: a) Az algortimus lépései szerint számolj!

Több egész (racionális) számra is végezd el a feladatot! (A megoldást lásd a következő oldalon!)

Az algoritmus többszöri elvégzése után a tanulók megsejtik, hogy minden gondolt egész szám esetén, ha jól számoltak 1-et kaptak eredményül.

b) Írj nyitott mondatot (egyenletet) az algoritmushoz, próbáld megoldani! Mit tapasztalsz?

5. példa

— Több olyan feladat van, melyek összes megoldásait általában nem keresik meg a tanulók. Ha egy tervszerű eljárást (algoritmust) követve oldanak meg a problémát, nem követnének el ilyen hibát. A következő feladat egy televíziós vetélkedőn („Aki mer az nyer”) volt, melynek minden megoldását egyetlen versenyző sem adta meg.

Feladat: Egy háromszögről a következőket tudjuk:

— Oldalai hosszúságának mérőszámai egymást követő prímszámok.

— Kerületének mérőszáma 50-nél kisebb prímszám.

Mekkorák a háromszög oldalai?

— A megoldás lépéseit így is lejegyezhetjük:

1) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 (50-nél kisebb prímszámok)

2) $2+3+5=10$ nem prímszám

3) $3+5+7=15$ nem prímszám

4) $5+7+11=23$ prímszám; $5+7>11$; $7+11>5$; $5+11>7$

5) **5, 7, 11 megoldások**

6) $7+11+13=31$ prímszám; $7+11>13$; $11+13>7$; $7+13>11$

7) **7, 11, 13 megoldások**

8) $11+13+17=41$ prímszám; $11+13>17$; $13+17>11$; $11+17>13$

9) **11, 13, 17 megoldások**

10) $13+17+19=49$ nem prímszám

11) Vége: nincs több a feltételeknek megfelelő számhármás.

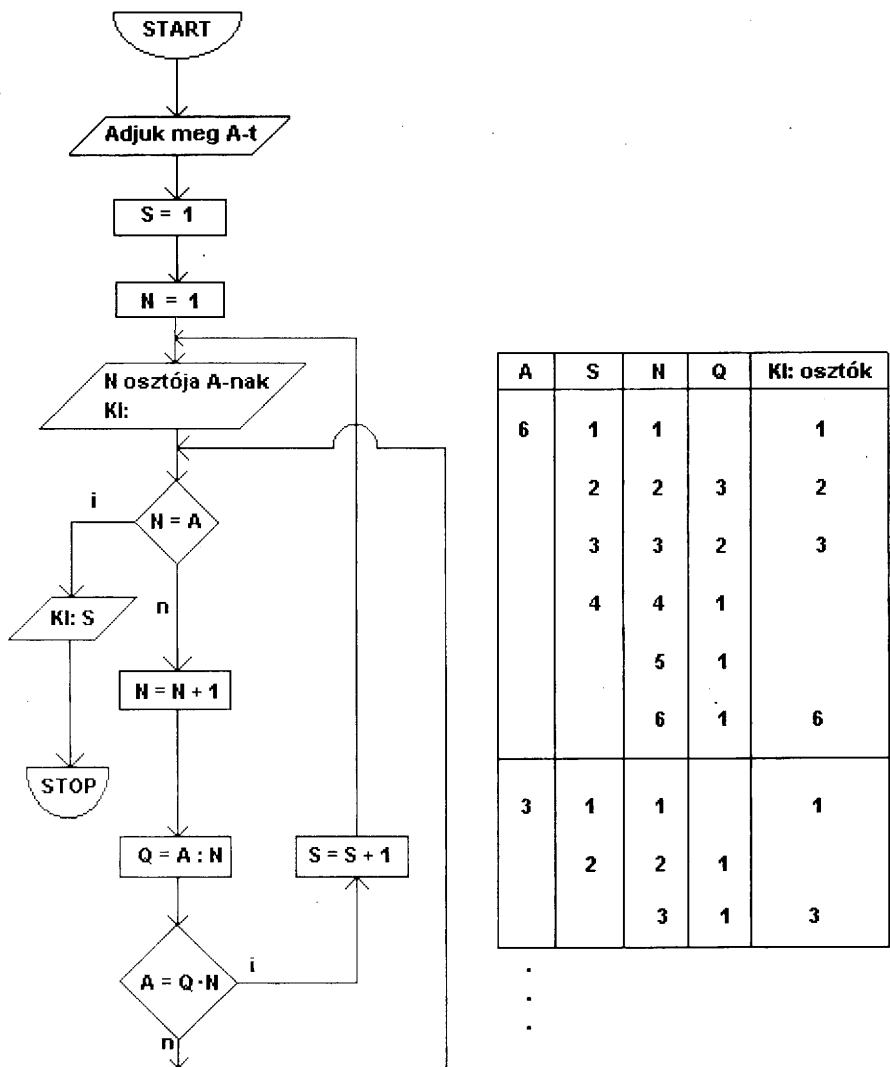
6. példa

— A következő probléma megoldására többféle eljárást (algoritmust) is tanítunk. Az alábbi folyamatábrát azért is érdemes megmutatni a tanulóknak, mert erre a megoldásra nem szoktak gondolni. Másrészt gyakoroltathatjuk vele a folyamatábra „olvasását” is.

Feladat: Keressük meg egy A pozitív egész szám összes pozitív osztóját! Számoljuk is meg az osztókat!

1. Gondolj egy számot!	2	1	0	-1	-2	... x
2. Adj hozzá 5-öt!	$2+5=7$	$1+5=6$	$0+5=5$	$-1+5=4$	$-2+5=3$	$x+5$
3. Az összeget szorozd meg 2-vel!	$7 \cdot 2=14$	$6 \cdot 2=12$	$5 \cdot 2=10$	$4 \cdot 2=8$	$3 \cdot 2=6$	$(x+5) \cdot 2$
4. Vonj ki az eredményből 8-cat!	$14-8=6$	$12-8=4$	$10-8=2$	$8-8=0$	$6-8=-2$	$(x+5) \cdot 2-8$
5. A kapott számot oszd el 2-vel!	$6:2=3$	$4:2=2$	$2:2=1$	$0:2=0$	$-2:2=1$	$\frac{(x+5) \cdot 2-8}{2}$
6. Vond ki az eredményből a gondolt számot!	$3-2=1$	$2-1=1$	$1-0=1$	$0-(-1)=1$	$-1-(-2)=1$	$\frac{(x+5) \cdot 2-8}{2} \cdot x$
7. Ha 1-et kaptál eredményül, akkor menj a 9.-re!	i	i	i	i	i	$\frac{(x+5) \cdot 2-8}{2} \cdot x = 1$
8. Ha nem 1-et kaptál eredményül, akkor hibáztál, vedd újra a gondolt számot és menj a 2.-ra!						
9. Vége: jól számoltál, menj az 1-re!						

6. ábra



7. ábra

— Segítséget ad az algoritmus elemzéséhez a fenti táblázatos módszer, melyben felírjuk a „változók” neveit, és lépésről lépésre haladva követjük az értékváltozásokat.

— Vetessük észre a tanulókkal, hogy a szám négyzetgyökéig (az osztó négyzete nem nagyobb az A számnál) minden osztót megtalálunk. „Fino-mítsuk” ennek figyelembe vételével a folyamatábrát!

— Adjunk meg másféle algoritmust a probléma megoldására! Írjuk le az algoritmus lépéseit (szöveggel)!

Irodalom

- [1] Matematika: 5., 6. (tankönyvek), *Calibra Kiadó*, Budapest, 1993.
- [2] Matematika: 7., 8. (tankönyvek), *Tankönyvkiadó*, Budapest, (1990)., (1991).
- [3] L. N. LANDA: Algortimizálás az oktatásban, *Tankönyvkiadó*, Budapest, (1969).
- [4] TÖRÖK: Matematika és számítástechnika, *A Matematika Tanítása*, (melléklet)

